2.9.17 Využití logaritmů při řešení exponenciálních závislostí a exponenciálních rovnic

Př. 1: Intenzita rentgenových paprsků se sníží na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Urči tloušťku olověné desky, která zeslabí intenzitu rentgenových paprsků na desetinu původní hodnoty.

$I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$. Dosadíme: $I_0 \frac{1}{10} = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$. $\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$

$0,1 = (0,5)^{\frac{x}{13,5}}$ $\log 0,1 = \log\left(0,5^{\frac{x}{13,5}}\right)$ $\log 0,1 = \frac{x}{13,5}\log 0,5 \quad / \cdot \frac{13,5}{\log 0,5}$

$x = \frac{13,5 \cdot \log 0,1}{\log 0,5}\,\text{cm} \doteq 44,8\,\text{cm}$

Při řešení předchozího příkladu jsme použili zlogaritmování rovnice. Rovnici ve tvaru $výraz1 = výraz2$ jsme nahradili rovnicí $\log_a(výraz1) = \log_a(výraz2)$ (rovnost čísel jsme převedli na rovnost jejich logaritmů). Tato úprava je pro hodnoty výrazu povolené při dosazení do logaritmů ekvivalentní a používá se zejména v případech, kdy potřebujeme neznámou „sundat“ z exponentu.

Př. 2: Do banky jsi uložil na úrok 3% částku 500000 Kč. Za kolik let budeš mít k dispozici 750 000 Kč?

$n = n_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ $750000 = 500000\left(1 + \frac{3}{100}\right)^t$ $75 = 50 \cdot 1,03^t$

$\log 75 = \log\left(50 \cdot 1,03^t\right)$ $\log 75 = \log 50 + \log 1,03^t$ $\log 75 - \log 50 = t \cdot \log 1,03$

$t = \frac{\log 75 - \log 50}{\log 1,03} = 13,7 = 14\,\text{let}$

Př. 3: Do banky chceš uložit částku 500000 Kč. Jaký musí banka poskytnout úrok, aby si za 10 let našetřil 750 000 Kč?

$n = n_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ $750000 = 500000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ $75 = 50\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$

$\frac{75}{50} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ $1,5 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ $\sqrt[10]{1,5} = \sqrt[10]{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}}$ $\sqrt[10]{1,5} = 1 + \frac{p}{100}$

$\sqrt[10]{1,5} - 1 = \frac{p}{100}$ $p = 100\left(\sqrt[10]{1,5} - 1\right) = 4,14$

Př. 4: Radiouhlíková metoda určování stáří organických materiálů využívá rozpad radioaktivního uhlíku ${}^{14}_{6}C$. Radioaktivní uhlík ${}^{14}_{6}C$ má poločas rozpadu 5730 let, protože však neustále vzniká kvůli dopadu kosmického záření, jeho obsah v atmosféře se nemění. Protože suchozemské živé organismy čerpají uhlík z atmosféry, je za jejich života obsah radioaktivního uhlíku ${}^{14}_{6}C$ v jejich tělech stejný jako v atmosféře. Jakmile však zemřou, přestane se radioaktivní uhlík v jejich tělech doplňovat a kvůli rozpadu jeho množství exponenciálně klesá. Z podílu radioaktivního uhlíku tak můžeme zjistit, jak dlouhá doba uplynula od okamžiku, kdy organismus uhynul. Při vykopávkách byla nalezena kostra, která obsahovala 78,6% radioaktivního uhlíku živého organismu. Urči, které významné historické osobnosti mohla kostra náležet.

$0,786=0,5^{\frac{x}{5730}}$ $\log 0,786=\log 0,5^{\frac{x}{5730}}$ $\log 0,786=\frac{x}{5730}\log 0,5$

$x=5730\frac{\log 0,786}{\log 0,5}=1990$ let

Př. 5: Vyřeš rovnici $2^x+2^{x+1}=9$.

$2^x+2^{x+1}=9$ $2^x+2\cdot 2^x=9$

Substituce: $y=2^x$ $y+2y=9$ $3y=9$ $y=3$

$y=2^x=3$ $2^x=3$ $\log_2 3 \Rightarrow x=\log_2 3$.

Radši zkusíme zkoušku: $L=2^{\log_2 3}+2^{\log_3 3+1}=3+2\cdot 2^{\log_2 3}=3+2\cdot 3=9$

Př. 6: Vyřeš rovnici $3^x+2\cdot 3^{1-x}=5$.

$3^x+2\cdot 3^{1-x}=5$ $3^x+2\cdot 3^{1-x}=5$ $3^x+2\cdot 3\cdot 3^{-x}=5$ $3^x+\frac{6}{3^x}=5$

Substituce: $y=3^x$ $y+\frac{6}{y}=5 \quad /\cdot y$ $y^2+6=5y$ $y^2-5y+6=0$

$(y-3)(y-2)=0$ $y_1=3$ $y_2=2$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=3^{x_1}=3$ $3^{x_1}=3^1$ $x_1=1$ $y_2=3^{x_2}=2$ $x=\log_3 2$

Př. 7: Vyřeš rovnici $7^x-6+8\cdot 7^{-x}=0$.

$7^x-6+8\cdot 7^{-x}=0 \quad /\cdot 7^x$ $7^x\cdot 7^x-6\cdot 7^x+8=0$

Substituce: $y=7^x$ $y^2-6y+8=0$ $(y-4)(y-2)=0$ $y_1=4$ $y_2=2$

$y_1=7^{x_1}=4$

$7^{x_1}=4$

$\log_7 7^{x_1}=\log_7 4$

$x_1\cdot\log_7 7=\log_7 4$

$x_1=\log_7 4$

$y_2=7^{x_2}=2$

$7^{x_2}=2$ Hledáme číslo, na které musíme umocnit sedmičku, aby vyšla dvojka, Teď už hledané číslo známe, hned z definice víme, že $x_2=\log_7 2$.

$K=\{\log_7 2;\log_7 4\}$

Př. 8: Petáková:
strana 34/cvičení 6 c) d)
strana 34/cvičení 7 c) d)